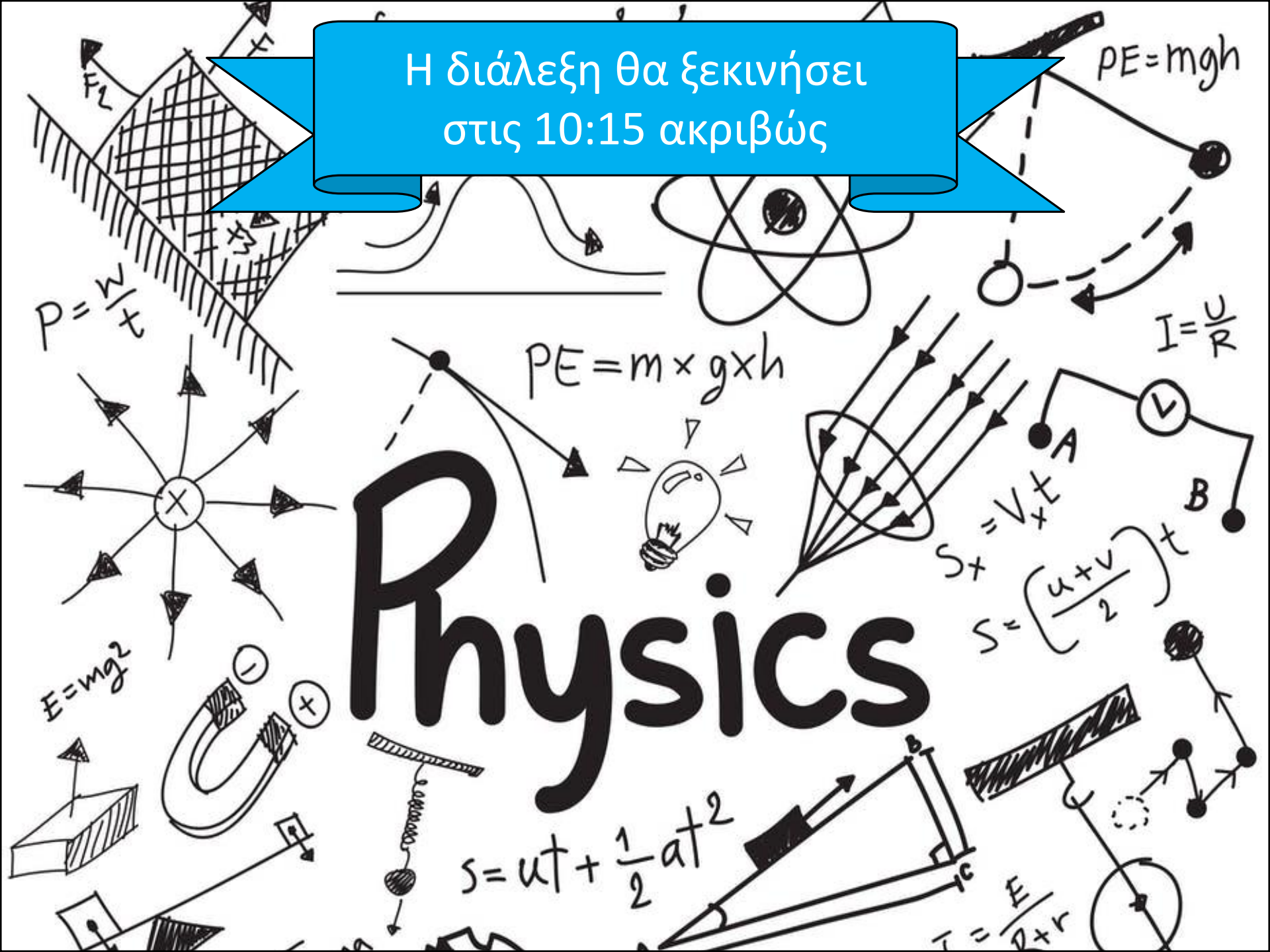


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:15 ακριβώς

Physics



Κίνηση σε μια Διάσταση (review...)

- Ειδική περίπτωση: a_x μηδενική (δηλ. ταχύτητα σταθερή)

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή, $a_x \neq 0$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

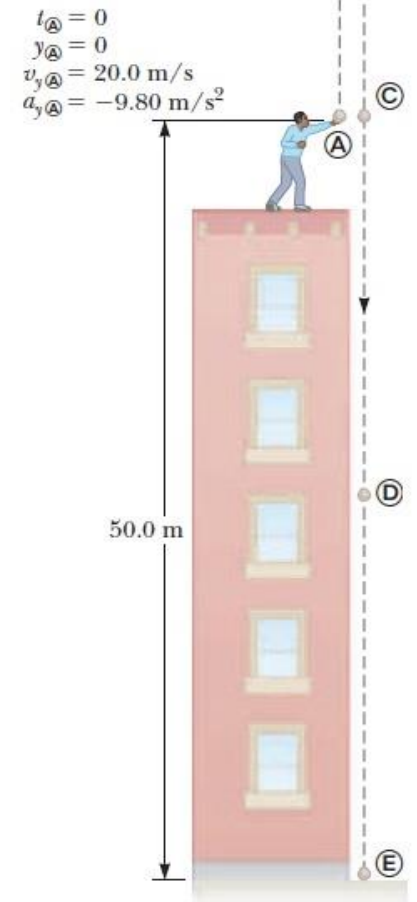
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- A) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
- B) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
- Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5 \text{ s}$.

- $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
- $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
- $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
- $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
- $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

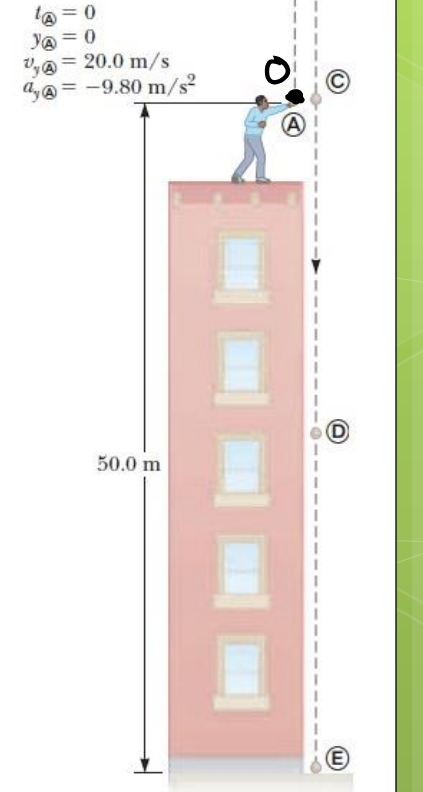
- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- A) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

Για τη διαδρομή A → B :

$$v_B = v_A - gt = 20 - 9.8t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 20 - 9.8t \Rightarrow \boxed{t \approx 2.04 \text{ sec}}$$

- $u_{xf} = u_{xi} + a_x t \leftarrow$
- $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
- $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
- $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
- $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

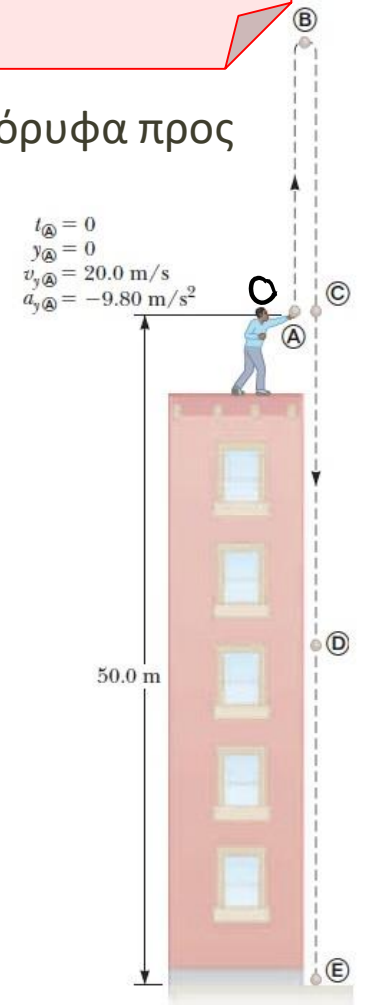
- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- B) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Στη διαδρομή A-B:

$$\begin{aligned}y_B &= y_A + \frac{1}{2} (u_A + u_B) \cdot t \\&= 0 + \frac{1}{2} (20 + 0) \cdot 2.04 \\&\approx 20.4 \text{ m} \Rightarrow \vec{y}_B \approx 20.4 \vec{j} \text{ m}\end{aligned}$$

Δωλέψτε τις σχέσεις (4,5) για να πάρετε το ίδιο αποτέλεσμα!

- $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$
- $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
- $x_f = x_i + \frac{1}{2} (u_{xi} + u_{xf}) t$
- $x_f = x_i + u_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
- $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

Διαδρομή $A \rightarrow C$.

$$u_c^2 = u_A^2 - 2g(\overbrace{y_c - y_A}^{\Delta y})$$

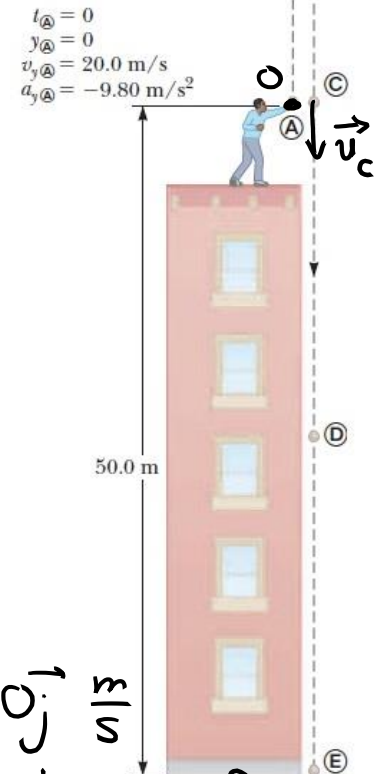
$$= u_A^2 \Rightarrow u_c^2 = 20^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_c = \pm 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επιλέξαμε ως απάντηση $u_c = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{u}_c = -20\vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας "δείχνει" προς τα κάτω (αντίθετα της διεύθυνσης)

1. $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.

- Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

Έστω D το ζητούμενο σημείο. Διαδρομή A → D:

Είναι
$$u_D = u_A - gt = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29 \frac{m}{s}$$

Άρα
$$\vec{u}_D = -29 \vec{j} \frac{m}{s}$$

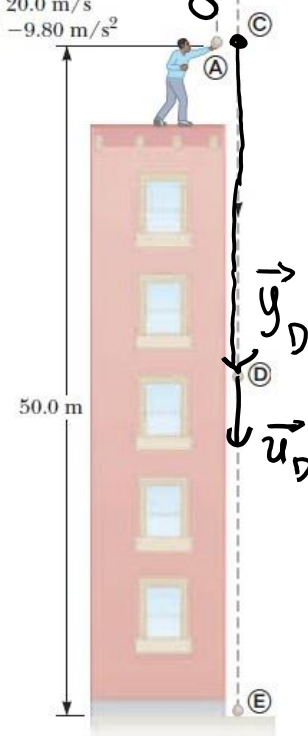
Στην ίδια διαδρομή, από την (1):

$$\left. \begin{aligned} y_D &= y_A + u_A \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= 0 + 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2 \end{aligned} \right\}_{t=5} = -22.5 \text{ m}$$

Άρα
$$\vec{y}_D = -22.5 \vec{j} \text{ m}$$

- $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
- $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
- $x_f = x_i + \frac{1}{2} (u_{x_i} + u_{x_f}) t$
- $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
- $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

$t_A = 0$
 $y_A = 0$
 $v_{yA} = 20.0 \text{ m/s}$
 $a_{yA} = -9.80 \text{ m/s}^2$



Κίνηση σε μια Διάσταση

○ Παράδειγμα:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα άνω.

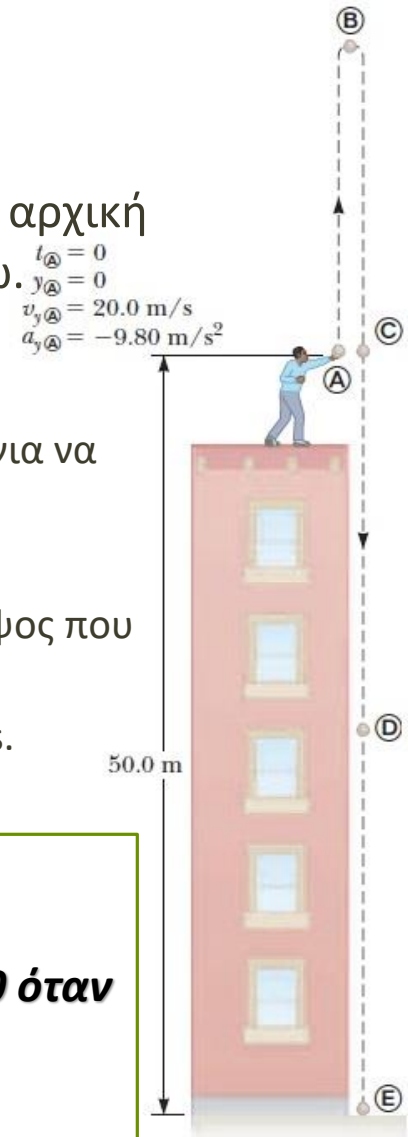
$$\begin{aligned}
 t_{\text{A}} &= 0 \\
 y_{\text{A}} &= 0 \\
 v_{y\text{A}} &= 20.0 \text{ m/s} \\
 a_{y\text{A}} &= -9.80 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$
 Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m .
- Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
 - Β) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
 - Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
 - Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5 \text{ s}$.

Εξάσκηση:

α) Λύστε τα Γ, Δ, με διαφορετικές αρχικές θέσεις.

β) Λύστε ξανά τα ερωτήματα Γ, Δ, υποθέτοντας ότι $t = 0$ όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση Β!

(πρέπει να βρείτε τα ίδια αποτελέσματα)!





Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
 - Κίνηση στο επίπεδο
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
 - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
 - Οποιασδήποτε μορφής βολής/βαλλιστική κίνηση
 - Ηλεκτρόνια σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία
 - Κυκλική κίνηση δορυφόρου

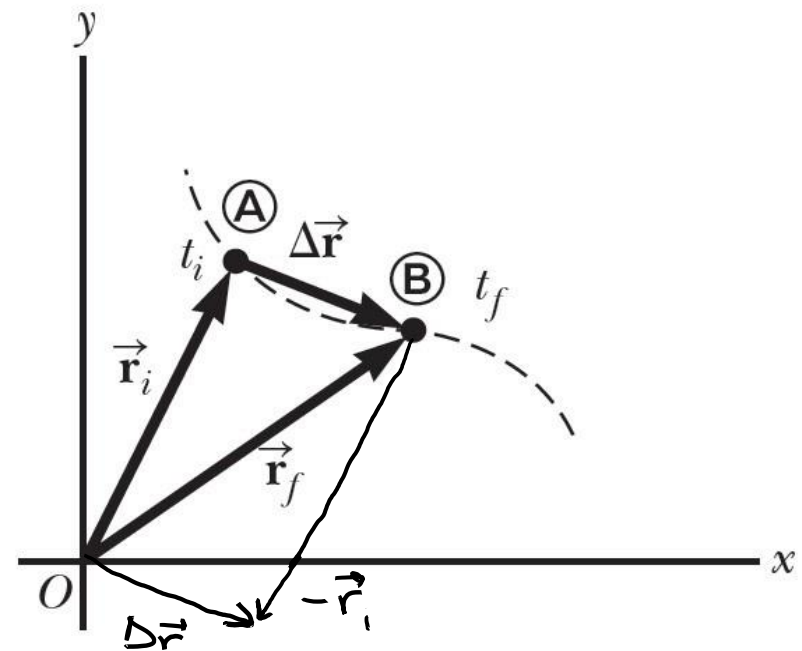
κ.α.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Είδαμε σε προηγούμενη διάλεξη την κίνηση σε μια διάσταση (οριζόντιος άξονας x)
- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο xy
 - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
 - ...αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
- Η γνώση όμως της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
 - Ξεκινά από το $(0,0)$ και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$**
 - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
 - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt :

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

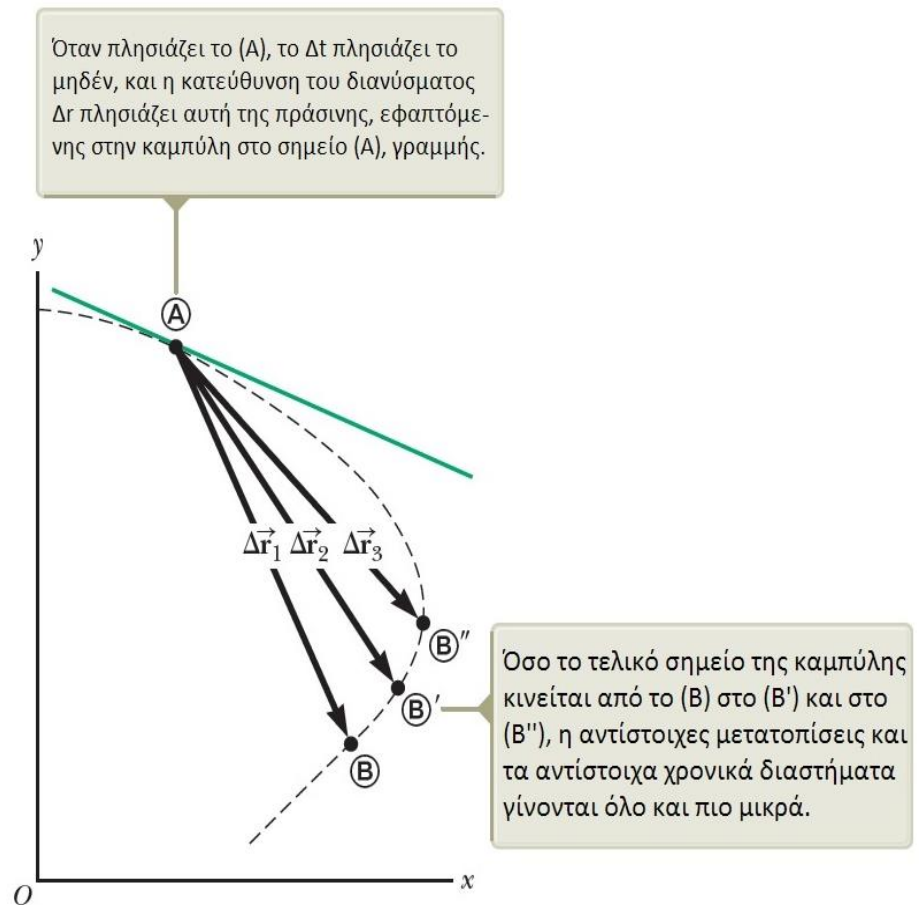
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta \vec{r}$
 - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
 - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta \vec{r}$
 - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (B, B', B'')
- Η κατεύθυνση του $\Delta \vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \equiv \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

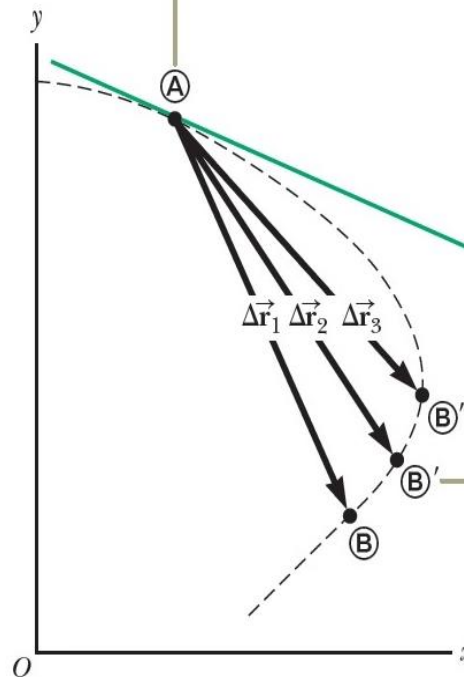
Όταν πλησιάζει το (A), το Δt πλησιάζει το μηδέν, και η κατεύθυνση του διανύσματος $\Delta \vec{r}$ πλησιάζει αυτή της πράσινης, εφαπτομένης στην καμπύλη στο σημείο (A), γραμμής.

- Η κατεύθυνση της σε οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο

- Ταχύτητα $u = |\vec{v}|$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Όσο το τελικό σημείο της καμπύλης κινείται από το (B) στο (B') και στο (B''), η αντίστοιχες μετατοπίσεις και τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα γίνονται όλο και πιο μικρά.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

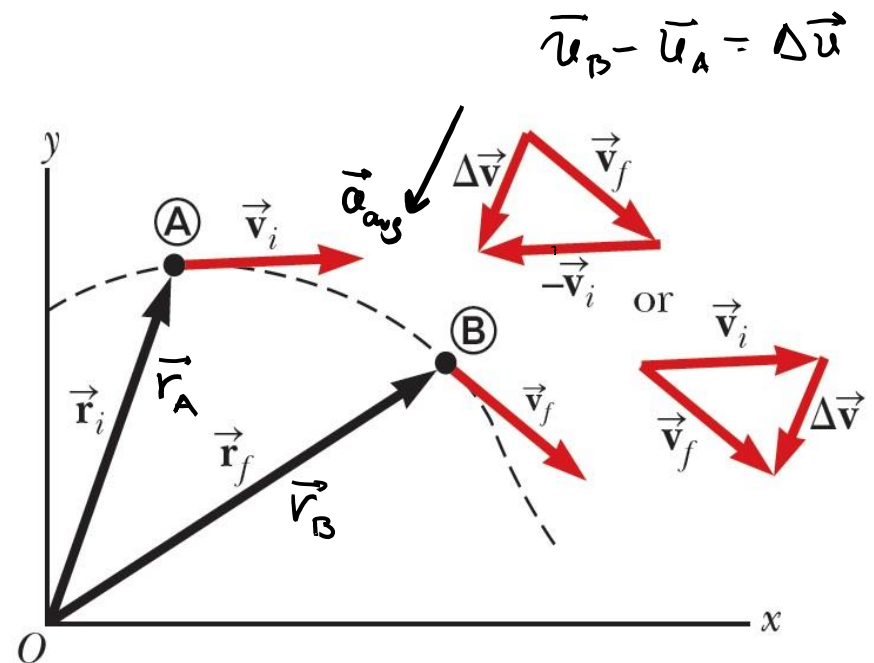
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta \vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στιγμαία Επιτάχυνση $\vec{a}$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Τι αλλαγές συμβαίνουν σε ένα σωματίδιο που επιταχύνει;
 - Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας
 - Αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας
 - ✓ Αλλαγή και των δυο παραπάνω
- Παράδειγμα:
 - Αυτοκίνητο με γκάζι, φρένο, τιμόνι. Ποια από αυτά προκαλούν την επιτάχυνσή του;

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση
 - ...όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση
- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
 - Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:
 - Τον άξονα των x
 - Τον άξονα των y
- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{r}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$, ως

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t, \quad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{i} + u_y\vec{j} &= (u_{x_i} + a_x t)\vec{i} + (u_{y_i} + a_y t)\vec{j} \\ &= (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overbrace{(x\vec{i})}^{x_f} + \overbrace{(y\vec{j})}^{y_f} = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} \\ &= \underbrace{(x_i\vec{i} + y_i\vec{j})}_{\vec{r}_i} + \underbrace{(u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j})}_{\vec{v}_i}t + \frac{1}{2}\underbrace{(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})}_{\vec{a}}t^2\end{aligned}$$

- Έτσι,

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

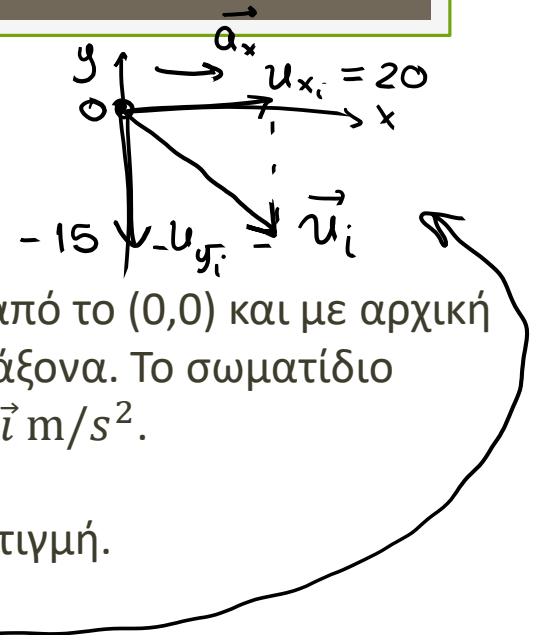
- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

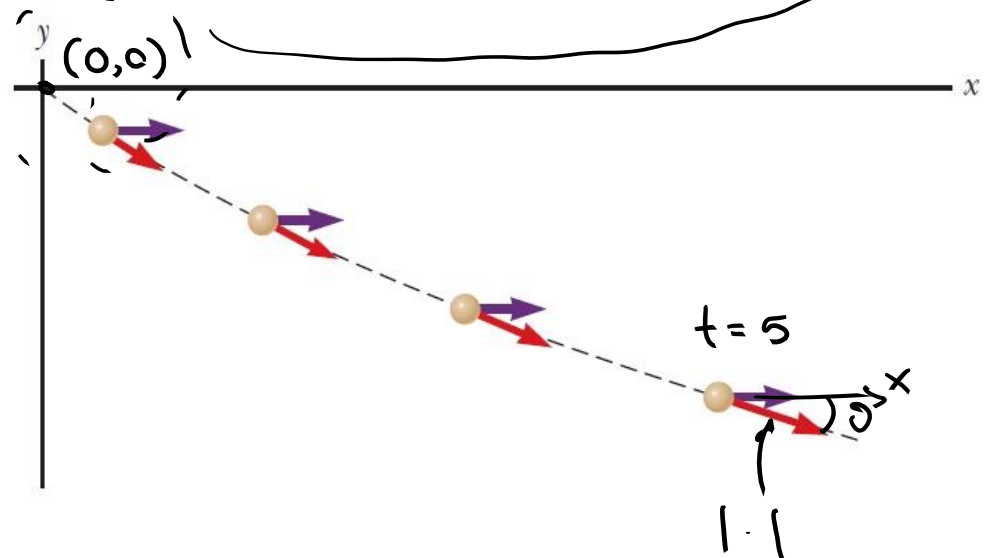
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.



A) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



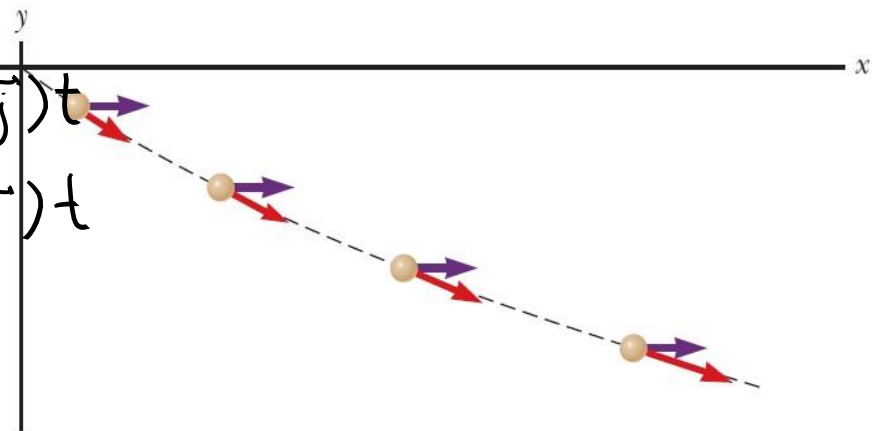
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

$$\begin{aligned}\text{Δείξαμε ότι: } \vec{v} &= \vec{u}_i + \vec{a} \cdot t \\ &= (u_{x_i} \vec{i} + u_{y_i} \vec{j}) + (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) t \\ &= (20 \vec{i} - 15 \vec{j}) + (4 \vec{i} + 0 \vec{j}) t \\ &= (20 \vec{i} - 15 \vec{j}) + 4 \vec{i} \cdot t \\ &= \underbrace{(20 + 4t)}_{u_x(t)} \cdot \vec{i} - \underbrace{15}_{u_y(t)} \vec{j} = u_x(t) \cdot \vec{i} + u_y(t) \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

$u_x(t) = 20 + 4t \quad u_y(t) = -15$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
- Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Ανέ A) εύρημα:

$$\vec{u}(t) = (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j}$$

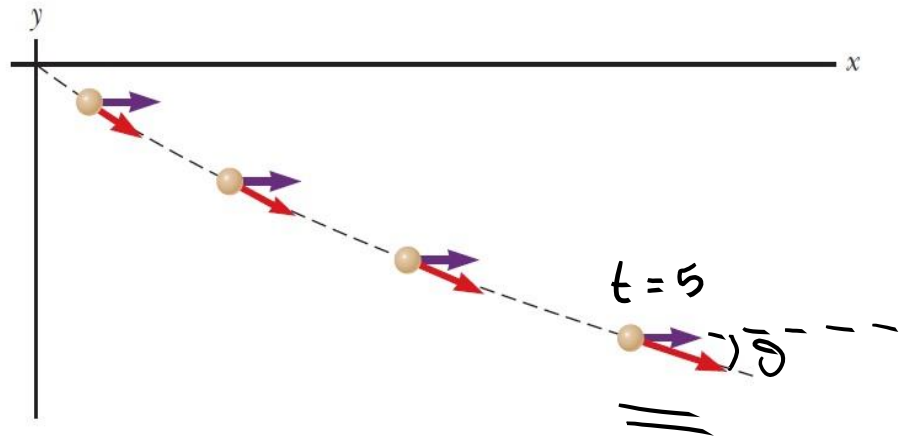
Λρα

$$\vec{u}(5) = 40\vec{i} - 15\vec{j}$$

Οποτε

$$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \cong 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vartheta(5) = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) \cong -21^\circ \text{ ή } 339^\circ$$



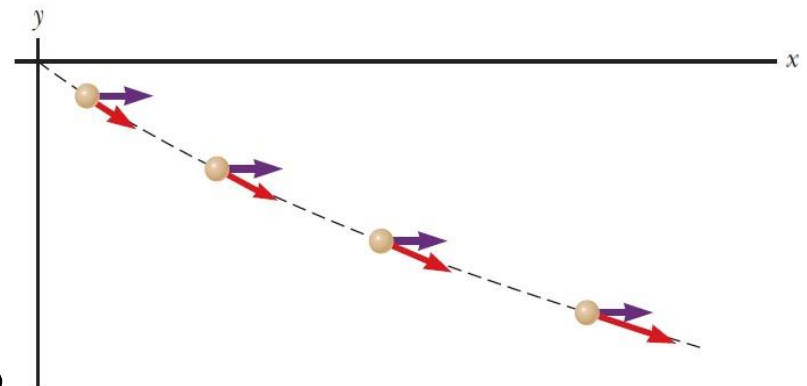
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

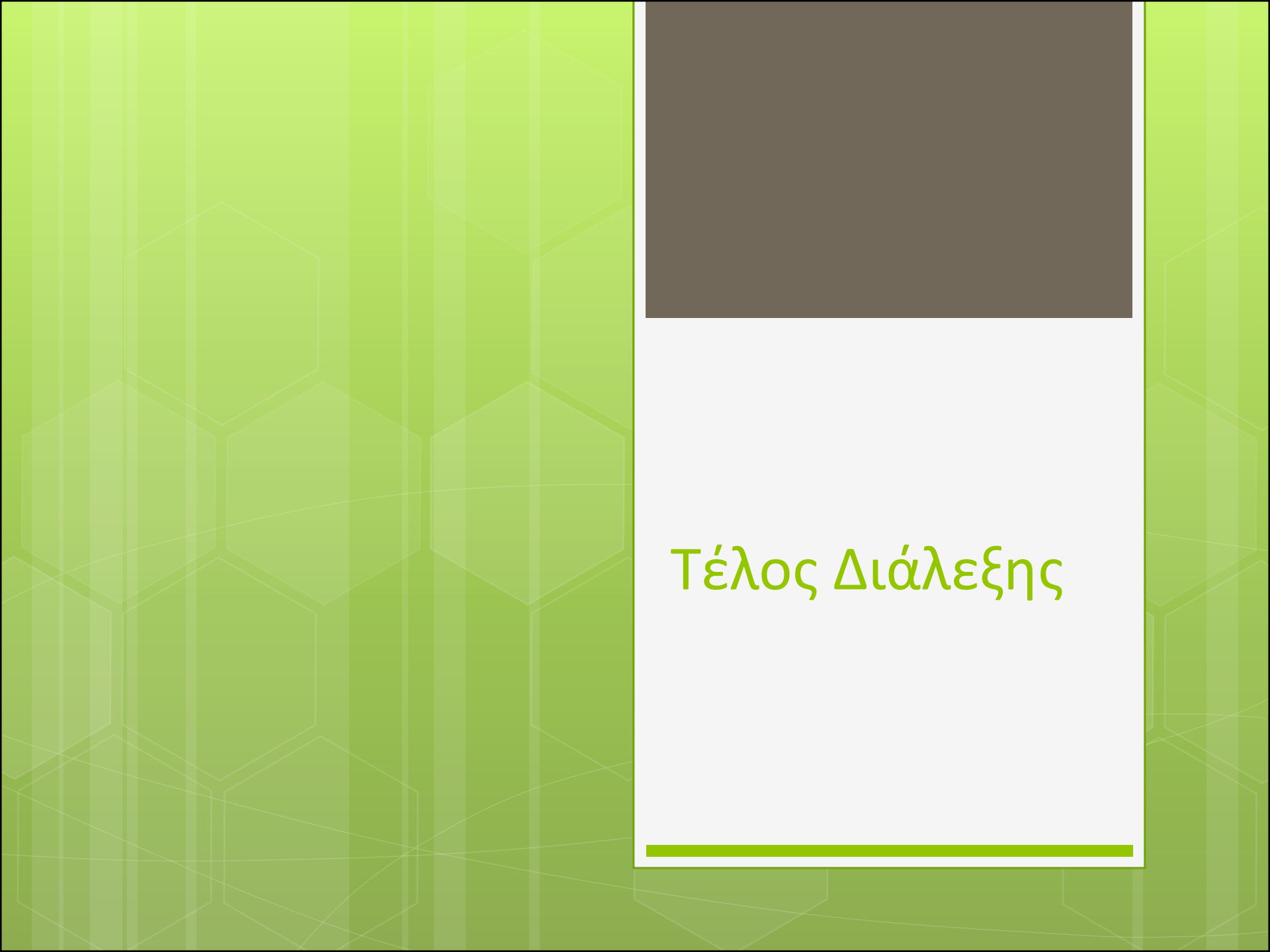
Ας μελετήσουμε την κίνηση κατά άξονες:

$$\begin{aligned}x\text{-άξονας: } x_f &= x_i + v_{x,i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\&= 0 + 20t + \frac{1}{2}4t^2 \\&= 20t + 2t^2 = x(t)\end{aligned}$$



$$y\text{-άξονας: } y_f = y_i + v_{y,i}t = 0 - 15t = -15t = y(t)$$

$$\text{Άρα } \vec{r}(t) = (20t + 2t^2) \cdot \vec{i} + (-15t) \cdot \vec{j}$$



Τέλος Διάλεξης

